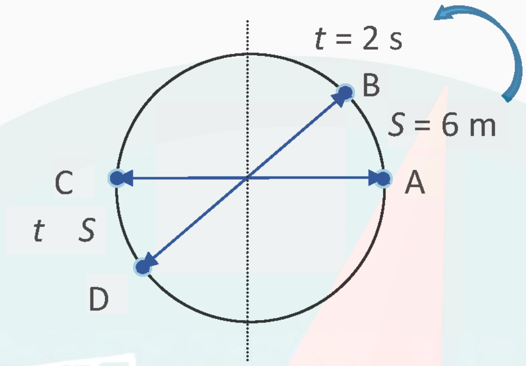
## 1. DEFINICIÓN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U.)

La trayectoria del móvil es una circunferencia. Puede recorrer una porción de esta o dar varias vueltas, y la recorre siempre al mismo ritmo y en el mismo sentido. Hablamos de sentidos horario y antihorario. Nosotros siempre usaremos antihorario.

*Ejemplo*:




Vemos que el móvil, por tanto, recorre arcos iguales en intervalos de tiempo iguales: mismos metros en los mismos segundos.

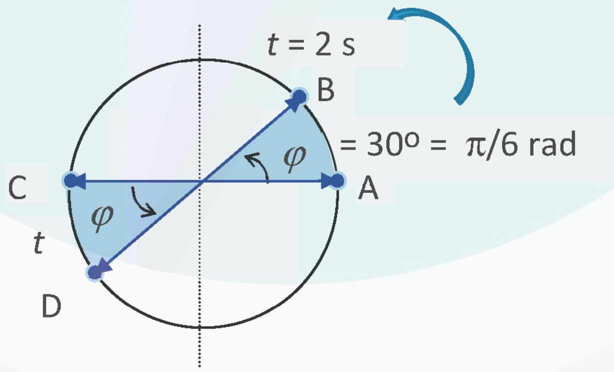
Cuidado: NO es un MRU, pues la dirección del movimiento varía constantemente.

Conocida la trayectoria, su centro y su radio, podemos ubicar al móvil si conocemos el **espacio que ha recorrido sobre la trayectoria**, ***S***. Pero medir el espacio recorrido sobre una circunferencia es poco preciso, por eso es mejor trabajar con ángulos.

Definimos el radiovector de un móvil que describe una circunferencia como el vector que va desde el centro de la circunferencia hasta la posición del móvil.

Si conocemos el **ángulo barrido por el radiovector**, $\boldsymbol{\varphi}$, también podemos ubicar al móvil.

*Ejemplo*:



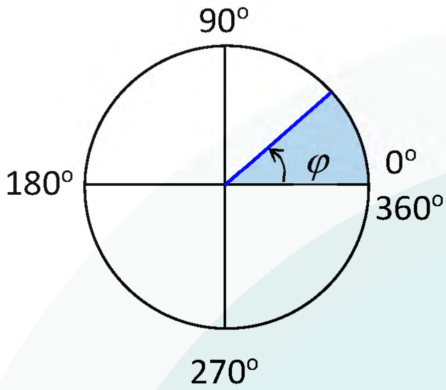

Vemos que el radiovector, barre ángulos iguales en intervalos de tiempo iguales: mismos radianes en los mismos segundos.

Vamos a necesitar trabajar con radianes para medir los ángulos.

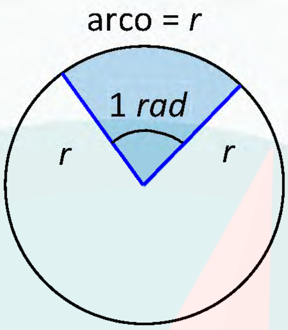
## 2. RADIANES

Definición de radián: un radián (rad) es el ángulo central que abarca un arco de la misma longitud que el radio de la circunferencia con el que ha sido trazado.

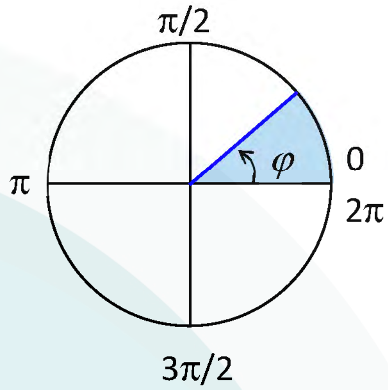
SISTEMA SEXAGESIMAL




Definición de Radián




RADIANES (en Física)




Dada la definición, podemos establecer las siguientes proporciones:

| Ángulo | Arco |
|---|---|
| 1 *rad* | *r* |
| 2 *rad* | 2 *r* |
| 2π *rad* | 2π *r* (*perímetro*) |

$\rightarrow$ 2π *rad* es el ángulo completo

Y por tanto la conversión entre grados sexagesimales y radianes se puede obtener con la proporción

$$\frac{180^{\circ}}{x^{\circ}} = \frac{\pi \text{ rad}}{y \text{ rad}}$$

*Ejemplo*: $\dfrac{180^{\circ}}{30^{\circ}} = \dfrac{\pi \text{ rad}}{y \text{ rad}} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

Los ángulos en radianes se deben poner siempre en función del número π.

Veamos la relación entre la magnitud lineal, espacio recorrido $S$, y su magnitud angular asociada, que es el ángulo barrido por el radiovector $\varphi$.

Según la definición de radián    arco = ángulo en radianes . radio $\rightarrow$ $\boxed{S = \varphi \cdot r}$

Si nos fijamos en las unidades (m = rad . m ) $\rightarrow$ es obligatorio, para que se cumpla la ecuación, poner el ángulo en radianes, pero dimensionalmente no hay que tenerlos en cuenta.

# 3. VELOCIDADES

En movimiento circular hablamos de dos tipos de velocidad (ambas son magnitudes escalares, siendo su signo siempre positivo al trabajar con los móviles avanzando en sentido antihorario):

## 3.1. VELOCIDAD LINEAL, CELERIDAD O RAPIDEZ

$$v\ (\text{m/s}) \equiv \frac{\text{longitud de arco recorrido}}{\text{tiempo en recorrerlo}} \qquad \boxed{v = \frac{S}{t}} \qquad \textit{Ejemplo}: v = 6/2 = 3\ \text{m/s}$$

En realidad, es el módulo del vector velocidad del móvil, $\vec{v}$.

## 3.2. VELOCIDAD ANGULAR

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}}$$

$$\boldsymbol{\omega}\ (\text{rad/s}) \equiv \frac{\text{ángulo barrido por el radiovector}}{\text{tiempo en barrerlo}} \qquad \textit{Ejemplo}: \omega = \frac{\pi/6}{2} = \frac{\pi}{12}\ \text{rad/s}$$

La velocidad angular, en rad/s, se debe poner siempre en función del número $\pi$.

Ambas son magnitudes constantes en el MCU.

Veamos la relación entre la magnitud lineal, velocidad lineal $v$, y su magnitud angular asociada, que es la velocidad angular $\omega$.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{\varphi \cdot r}{t} \rightarrow \boxed{v = \omega \cdot r} \quad (\text{m/s} = \text{rad/s} \cdot \text{m}) \quad \text{como antes en cuanto a las unidades.}$$

*Ejemplo*: si $v = 3$ m/s y $\omega = \pi/12$ (rad/s) $\rightarrow$ $r = v\ /\ \omega = \dfrac{3}{\pi/12} = \dfrac{36}{\pi} = 11{,}46$ (m)

redondeando, por exceso a 2 decimales.

*NOTA*: trabajaremos siempre con dos o tres decimales, redondeando los números por exceso, es decir, si la primera de las cifras de las que vamos a prescindir está entre 0 y 4 simplemente borraremos los decimales que sobren, pero si está entre 5 y 9 tendremos que aumentar una unidad la última cifra decimal que dejemos.

En M.C.U. como el ritmo se mantiene podemos introducir dos magnitudes adicionales para medirlo:

## 4. PERÍODO DEL M.C.U.

Como el móvil recorre la circunferencia siempre al mismo ritmo podemos definir su **Período**:

**T** (s) ≡ tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa (una revolución, o un ciclo).

Debe su nombre al hecho de que cada T (s) el móvil vuelve a pasar por la misma posición.

Cuanto menor sea T más rápido avanza el móvil.

Podemos relacionar el período con las otras magnitudes que miden el ritmo:

$v = \frac{S}{t}$ así que considerando 1 ciclo $\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$

Análogamente $\omega = \frac{\varphi}{t}$ así que considerando 1 ciclo $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

*Ejemplo*: si $\omega = \pi/12$ (rad/s) $\rightarrow$ T = $2\pi / \omega = \frac{2\pi}{\pi/12}$ = 24 (s)

## 5. FRECUENCIA DEL M.C.U.

Como el móvil tarda lo mismo en cada ciclo podemos definir su **Frecuencia**:

***f*** (Hz) ≡ número de vueltas completas (revoluciones o ciclos) que recorre el móvil cada segundo. Se mide en $s^{-1}$, unidad a la que llamamos Hercio, y representamos por Hz.

Cuanto mayor sea *f* más rápido avanza el móvil.

*Ejemplo*: si T = 24 (s) $\rightarrow$ cada segundo recorre 1/24 de ciclo $\rightarrow$ $f$ = 1/24 (Hz) = 0,042 (Hz)

En general $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ $\rightarrow$ su relación con las otras magnitudes que miden el ritmo será:

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

A veces el ritmo viene expresado en revoluciones por minuto, r.p.m.
*Ejemplo*: 20 r.p.m. equivalen a 20/60 r.p.s. $\rightarrow$ $f$ = 20/60 (Hz) = 0,33 (Hz)

## 6. ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA

Si empujamos a un móvil en la misma dirección en la que se desplaza le provocamos una aceleración que cambia su celeridad, $v$ (m/s), haciendo que vaya cada vez más rápido, o cada vez más despacio pudiendo lograr que incluso cambie de sentido.

Esta aceleración se llama **Aceleración Tangencial**, $\boldsymbol{a_t}$, pues es tangente a la trayectoria. Su valor viene dado por

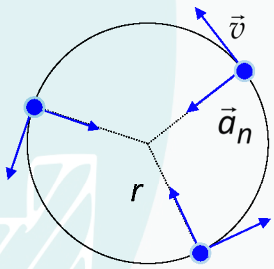
$$\boxed{a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}} \quad (\text{m/s}^2)$$

Si es positiva el móvil irá cada vez más rápido, si es negativa irá cada vez más lento y si es nula no cambiará la celeridad.

En M.C.U. como $|\vec{v}|$ es constante $\rightarrow a_t = 0$

Si queremos que el móvil cambie de dirección debemos empujarlo con una fuerza en una dirección diferente a la que tiene, y si pretendemos que describa una circunferencia dicha fuerza debe ir siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria y ser siempre igual de intensa.

Esto provoca en el objeto un tipo especial de aceleración, $\boldsymbol{a_n}$, dirigida hacia el centro de la trayectoria a la que llamamos:




**Aceleración Centrípeta**: pues está dirigida hacia el centro de la circunferencia en cada instante.

**Aceleración normal**: pues es perpendicular a la dirección del móvil en cada instante. La dirección del móvil al pasar por un punto es la de la recta tangente a su trayectoria en dicho punto, es decir, la de su vector velocidad, $\vec{v}$.

Su valor viene dado por

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}} \quad (\text{m/s}^2) \qquad \text{y vemos que en MCU es constante.}$$

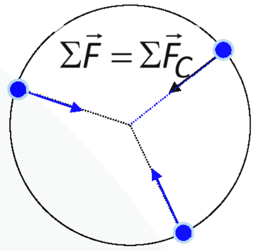
Cuanto mayor sea esta aceleración (menor $r$, mayor $v$, mayor $\omega$) más rápidamente irá cambiando la dirección del movimiento del móvil.

## 7. RESULTANTE CENTRÍPETA

Teniendo en cuenta el segundo principio de la dinámica (la segunda Ley de Newton) ,

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{a}}$$

como *m* es un número positivo, deducimos que la aceleración centrípeta debe estar producida por una resultante con su misma dirección y su mismo sentido. A dicha resultante la llamamos **Fuerza Resultante Centrípeta**, $\boldsymbol{\Sigma F_C}$, y su módulo es




$$\boxed{\Sigma F_C = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r} \qquad \text{(N)}$$

La resultante centrípeta es una Fuerza Central: fuerza que, esté donde esté el móvil, apunta siempre hacia el mismo punto, al que llamamos centro de la fuerza central, que en este caso es el centro de la circunferencia.

Cuidado: NO es ninguna fuerza adicional que actúe sobre el móvil, sino que es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre *m* en la dirección radial y hacia el centro de la trayectoria.

Cuando nuestro móvil describa un MCU hallaremos el módulo de la resultante y lo igualaremos al módulo de la resultante centrípeta pues es seguro que su resultante estará dirigida desde el móvil hacia el centro de su trayectoria y su valor será $\Sigma F_C = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$.

Si esto no sucede $\rightarrow$ el móvil NO describirá MCU.

| | |
|---|---|
| $S=\varphi \cdot r$ | Espacio recorrido sobre la trayectoria (m) |
| $v=\dfrac{S}{t}$ | Velocidad Lineal, celeridad o rapidez (m/s) o (m $s^{-1}$) |
| $\omega=\dfrac{\varphi}{t}$ | Velocidad angular (rad/s) o (rad $s^{-1}$) |
| $v=\omega \cdot r$ | |
| $f=\dfrac{1}{T}$ | Frecuencia (Hz) |
| $a_t=\dfrac{d\lvert\vec{v}\rvert}{dt}$ | Aceleración tangencial (m/$s^2$) o (m $s^{-2}$) |
| $a_n=\dfrac{v^2}{r}$ | Aceleración normal o aceleración centrípeta (m/$s^2$) o (m $s^{-2}$) |
| $\Sigma\vec{F}=m\,\vec{a}$ | Resultante según la Segunda ley de Newton, para *m* constante, (N) |
| $\Sigma F_C=\dfrac{m v^2}{r}=m\,\omega^2\,r$ | Módulo de la resultante centrípeta (N) |