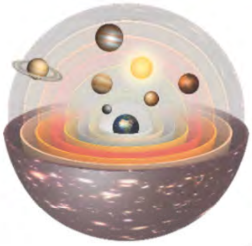
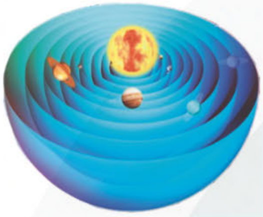
# TEMA 5: CAMPO GRAVITATORIO

## 1. INTRODUCCIÓN



Desde **Aristóteles** hasta el siglo XVI dominó la idea de un **Universo Geocéntrico**: esferas concéntricas, con la Tierra en su centro.
La esfera exterior que contenía a las estrellas giraba uniformemente arrastrando a las esferas interiores que contenían a los planetas.
(El universo en esa época entonces era solamente el Sistema Solar)



**Copérnico**, ya en el siglo XVI, fue el primero en proponer la **Teoría Heliocéntrica**: el centro del Universo es el Sol, mientras que los planetas del Sistema Solar, incluida la Tierra, giran alrededor de él.

**Galileo**, ya a finales del siglo XVI, usando un telescopio realizó medidas que no se podían explicar con la teoría geocéntrica y sí con la heliocéntrica, por lo que defendió fervientemente esta última.

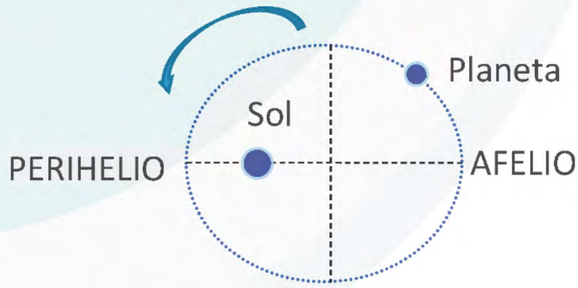
**Kepler**, a principios del siglo XVII, y tras muchos años de analizar sus datos experimentales y los de Tycho Brahe llegó por fin a interpretar correctamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol, expresándolo en sus tres leyes: **El Universo es Heliocéntrico**.

**Newton**, a finales del siglo XVII, con su Ley de la Gravitación Universal, fue quien culminó la tarea de explicar el movimiento planetario.

## 2. LEYES DE KEPLER

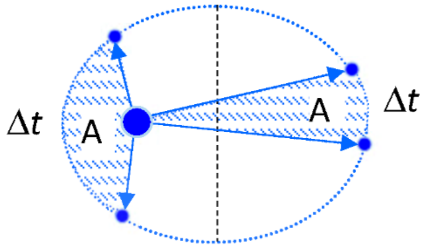
### 2.1. PRIMERA LEY

"La órbita de los planetas es plana, y de forma elíptica, con el Sol en uno de sus focos.
Además, la excentricidad de dichas elipses es tan pequeña que se asemejan a circunferencias"




El punto de la órbita del planeta más cercano al Sol se llama **Perihelio**, y el más lejano **Afelio**.

## 2.2. SEGUNDA LEY




"A medida que un planeta se mueve por su órbita varían su celeridad y su velocidad angular, pero el **radiovector** que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales"

Consecuencia: el punto por el que circula más lento es el afelio, y el punto por el que circula más rápido es el perihelio.

Se define la **Velocidad Areolar** como la rapidez con la que el radiovector barre el área:

$$\boxed{v_{\text{areolar}} = \frac{\text{área barrida}}{\text{tiempo en barrerla}}}$$

($m^2/s$) La Velocidad Areolar es constante.

## 2.3. TERCERA LEY

"El movimiento planetario alrededor del Sol es periódico, además $\boxed{T^2 = cte \cdot r^3}$ con

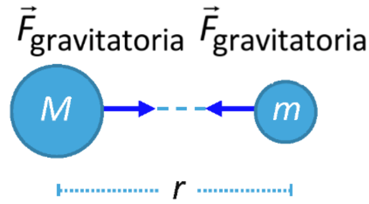
$r \equiv |\text{radiovector medio}|$ = longitud del semieje mayor de la elipse $\boxed{r_{\text{medio}} = \dfrac{r_{\text{afelio}} + r_{\text{perihelio}}}{2}}$ "

Consecuencia: la relación entre los cuadrados de los períodos de dos planetas del Sistema Solar es la misma que entre los cubos de sus radios: $\boxed{\dfrac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \dfrac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}}$

| Planeta | Mercurio | Venus | Tierra | Marte | Júpiter | Saturno | Urano | Neptuno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Masa ($\cdot 10^{24}$ kg) | 0,33 | 4,87 | 5,97 | 0,64 | 1 898 | 568 | 87 | 102 |
| Radio medio (km) | 2 440 | 6 052 | 6 371 | 3 390 | 69 911 | 58 232 | 25 362 | 24 622 |
| Densidad (g/cm$^3$) | 5,427 | 5,243 | 5,513 | 3,934 | 1,326 | 0,687 | 1,270 | 1,642 |
| Gravedad superficie (m/s$^2$) | 3,70 | 8,87 | 9,81 | 3,71 | 24,79 | 10,40 | 8,87 | 11,15 |
| Componentes atmósfera | | $CO_2$, $N_2$ | $N_2$, $O_2$ | $CO_2$, $N_2$, Ar | $H_2$, He | $H_2$, He | $H_2$, He, $CH_4$ | $H_2$, He, $CH_4$ |
| Lunas (anillos) | 0 (no) | 0 (no) | 1 (no) | 2 (no) | 79 (sí) | 83 (sí) | 27 (sí) | 14 (sí) |
| Período de Rotación (días) | 58,65 | –243 | 1 | 1,03 | 0,41 | 0,44 | –0,72 | 0,67 |
| Inclinación ecuatorial (grados) | 0 | 177º | 23º | 25º | 3º | 27º | 98º | 28º |
| Distancia al Sol ($\cdot 10^6$ km) | 58 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1 427 | 2 871 | 4 498 |
| Inclinación de la órbita (grados) | 7,0º | 3,4º | 0,0º | 1,9º | 1,3º | 2,5º | 0,8º | 1,8º |
| Excentricidad actual | 0,206 | 0,007 | 0,017 | 0,093 | 0,048 | 0,054 | 0,047 | 0,009 |
| Velocidad media orbital (km/s) | 47,36 | 36,02 | 29,78 | 24,08 | 13,06 | 9,64 | 6,80 | 5,44 |
| Período de Revolución (años) | 0,24 | 0,62 | 1 | 1,88 | 11,86 | 29,45 | 84,02 | 164,79 |
| Velocidad de escape (km/s) | 4,25 | 10,36 | 11,19 | 5,03 | 60,2 | 36,09 | 21,38 | 23,56 |
| Masa relativa (Tierra = 1) | 0,06 | 0,81 | 1 | 0,11 | 318 | 95 | 15 | 17 |
| Radio medio (Tierra = 1) | 0,38 | 0,95 | 1 | 0,53 | 11 | 9 | 4 | 4 |
| Gravedad relativa (Tierra = 1) | 0,38 | 0,90 | 1 | 0,38 | 2,53 | 1,06 | 0,90 | 1,14 |
| Distancia Sol relativa (Tierra = 1) | 0,39 | 0,72 | 1 | 1,5 | 5,2 | 9,5 | 19,1 | 30,0 |
| $v$ orbital relativa (Tierra = 1) | 1,59 | 1,21 | 1 | 0,81 | 0,44 | 0,32 | 0,23 | 0,18 |

## 3. LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

"La fuerza gravitatoria que se ejercen entre sí dos masas, *M* y *m*, ubicadas en cualquier punto del universo y separadas una distancia *r*, viene dada por:




$$\boxed{\left|\vec{F}_{\text{gravitatoria}}\right| = G\,\frac{M\cdot m}{r^2}}\ \text{(N)}$$

Es una fuerza atractiva

donde $\boxed{G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2}$ es la **Constante de Gravitación Universal**

## 4. CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Cuanto mayor es la masa de un cuerpo, mayor es su resistencia a cambiar de velocidad. Por ejemplo, a un camión le cuesta mucho más frenar o arrancar que a una bicicleta. Para tener esto en cuenta definimos una magnitud que tenga en cuenta masa y velocidad a la vez:

$\boxed{\vec{p} = m\cdot\vec{v}}$ ≡ **Cantidad de Movimiento**, o **Momento Lineal** de *m* que se desplaza con $\vec{v}$.

$|\vec{p}| = m\cdot|\vec{v}|$ (kg m/s). Dirección y sentido los de $\vec{v}$: tangente a la trayectoria y con el sentido del movimiento. Punto de aplicación: en el que se encuentre *m*.

### 4.1. PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE TRASLACIÓN

Aunque nosotros siempre lo enunciamos como $\sum\vec{F} = m\cdot\vec{a}$, esto sólo sirve para el caso en que la masa *m* del cuerpo sea constante. En realidad, el principio es más general:

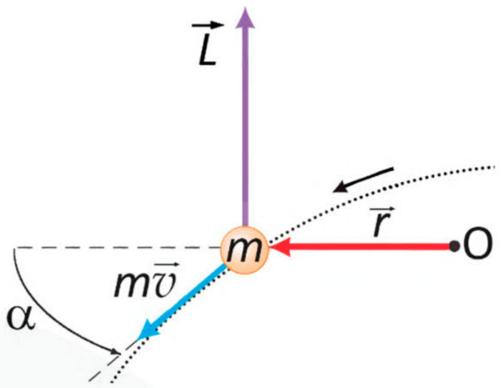
$$\boxed{\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} = \sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow$$

$$\sum\vec{F} = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{a}$$ solamente si *m* es constante.

### 4.2. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Si la resultante es nula, $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}$ es constante.

## 5. MOMENTO ANGULAR




Dada una partícula de masa *m*, desplazándose con velocidad $\vec{v}$, y dado un punto fijo del espacio O, definimos:

**Momento Angular** o **Cinético** de *m* calculado respecto a O

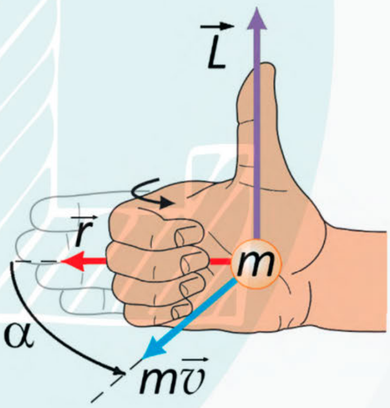
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

Si tomamos el punto O como origen del sistema de referencia entonces $\vec{r}$ es el vector de posición de *m*.

Según la definición del producto vectorial:

**Módulo**:
$|\vec{L}| = r \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}\alpha = r \cdot m\,|\vec{v}| \cdot \text{sen}\alpha$ (kg m²/s), siendo α el ángulo barrido para ir desde $\vec{r}$ hasta $m\vec{v}$ por el camino más corto.
Para α = 90º será máximo, $|\vec{L}| = r \cdot m\,|\vec{v}|$, y para α = 0º ,180º será mínimo, $|\vec{L}|$ = 0.

**Dirección**:
perpendicular a $\vec{r}$ y perpendicular a $\vec{v}$ (perpendicular al plano que forman ambos vectores si no son paralelos) ⟶ perpendicular al plano de la trayectoria..




**Sentido**:
viene dado por la Regla de la mano Derecha: estando $\vec{r}$ y $\vec{v}$ con origen común, colocando el resto de los dedos en el sentido para ir desde de $\vec{r}$ hacia $\vec{v}$, por el camino más corto, entonces el pulgar apunta en el sentido de $\vec{L}$ .

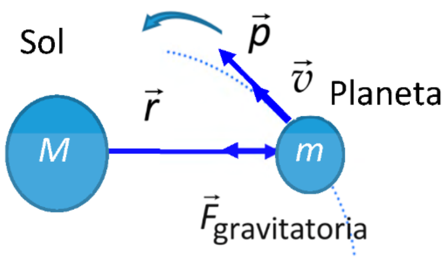
**Punto de aplicación**:
en el que esté la masa *m*, aunque, como es un vector libre, puede dibujarse en O).

Otra forma de calcular $\vec{L}$, muy útil si tenemos los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ expresados en forma de componentes, es resolver su determinante 3x3 asociado:

$$\vec{L} = (x\,,y\,,z) \times m\cdot\left(v_x\,,v_y\,,v_z\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} =$$

$$= m\cdot\left[\vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right] = m\cdot\left(yv_z - zv_y\,, -xv_z + zv_x\,, xv_y - yv_x\right)$$

## 6. MOMENTO ANGULAR DE LOS PLANETAS RESPECTO AL SOL




Veamos como varía con el tiempo el momento angular de un planeta, calculado respecto a la posición del Sol:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\sum\vec{F}=$$

$$\vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\sum\vec{F}_{gravitatoria}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

pues $\vec{v}\ ||\ \vec{p}$ pues $\vec{r}\ ||\sum\vec{F}_{gravitatoria}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{L}\text{ se conserva}}$

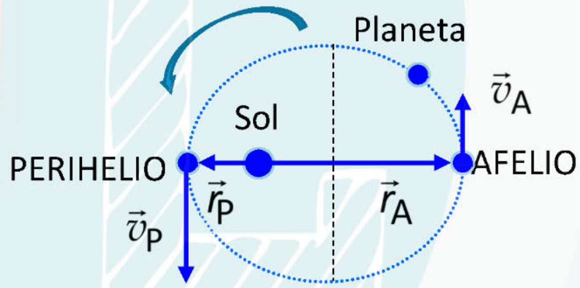
Consecuencias:

- Como la dirección de $\vec{L}$ se mantiene $\rightarrow$ $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están siempre en el mismo plano$\rightarrow$ las **órbitas son planas**.

- Como el sentido de $\vec{L}$ no varía $\rightarrow$ el sentido para ir desde $\vec{r}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto es siempre el mismo: las **órbitas son siempre en el mismo sentido**.

(esto es una parte de la 1ª ley de Kepler)

- Como el módulo de $\vec{L}$, $|\vec{L}|=r\cdot m\,|\vec{v}|\cdot\text{sen}\alpha$ no varía $\rightarrow |\vec{L}_A|=|\vec{L}_P|\rightarrow$



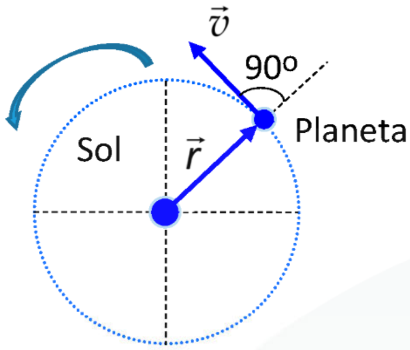

$r_A\, m\, v_A$ sen 90º = $r_P\, m\, v_P$ sen 90º $\rightarrow r_A\, v_A = r_P\, v_P$

y como $r_A > r_P \rightarrow v_A < v_P$

La celeridad va cambiando con la distancia al Sol, siendo **máxima en Perihelio y mínima en Afelio**.

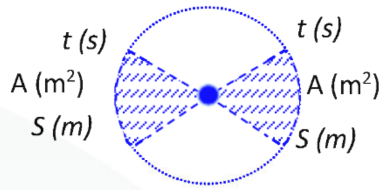
(esto es una parte de la 2ª ley de Kepler)

## 7. APROXIMACIÓN DE MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME




Si suponemos que el movimiento de los planetas alrededor del Sol es M.C.U. con el Sol en su centro, con lo que cometemos muy poco error $\rightarrow$

A las mismas áreas corresponden los mismos arcos y los mismos tiempos $\rightarrow$ (2ª Ley de Kepler)

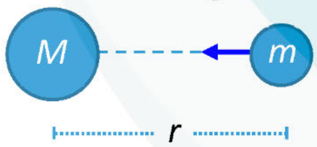



el ritmo con el que se barren las áreas es constante $\rightarrow$ La Velocidad Areolar cumple:

$$v_{\text{areolar}} = v_{\text{areolar media}} = \frac{\pi r^2}{T} = \frac{\omega r^2}{2} = \frac{v\, r}{2} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{T} \qquad v = \omega \cdot r \qquad |\vec{L}| = r\, m\, v \text{ sen} 90^{\circ} \rightarrow \frac{|\vec{L}|}{m} = r\, v$$

$$\boxed{v_{\text{areolar}} = \frac{|\vec{L}|}{2m}} \qquad (\text{m}^2/\text{s})$$




Además, $\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = \Sigma \vec{F}_{\text{centrípeta}} \rightarrow \left|\vec{F}_{\text{gravitatoria}}\right| = \left|\Sigma \vec{F}_{\text{centrípeta}}\right| \rightarrow$

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m\, \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G\, M} \cdot r^3 = cte \cdot r^3}$$

Donde vemos que la constante depende de la masa del centro atractor. (3ª Ley de Kepler)

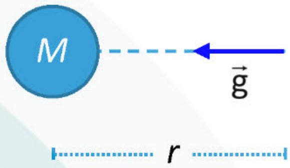
También es válida con órbitas elípticas, con $r = r_{\text{medio}}$

## 8. CAMPO GRAVITATORIO

Siempre que hay fuerzas sin contacto hablamos de **Campo**: algo (masa, carga…) crea una influencia a su alrededor que se hace patente cuando al colocar en dicha zona otra cosa análoga (masa, carga…) esta última se ve afectada por una fuerza.

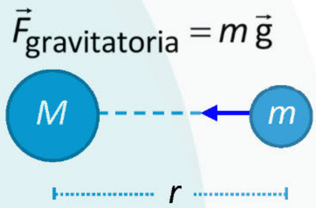
Para masas a esa influencia la representamos por el vector **Intensidad del campo Gravitatorio, o simplemente Campo Gravitatorio $\vec{g}$** .

La influencia de una masa *M* en un punto del espacio que dista de ella *r* se caracteriza por $\vec{g}$ :




$$\boxed{|\vec{g}| = G\frac{M}{r^2}}$$ (N/kg) desde el punto considerado hacia el centro de *M*

De esta forma, si ahora en el punto considerado colocamos una masa *m* se verá afectada por una fuerza gravitatoria con su misma dirección y su mismo sentido, de módulo:

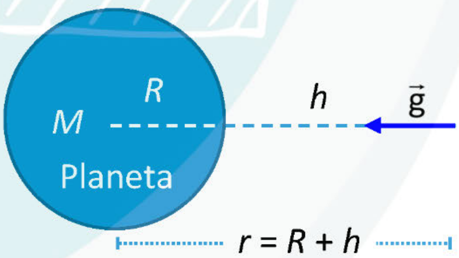



$$\left|\vec{F}_{\text{gravitatoria}}\right| = G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\,|\vec{g}| \rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{g}}$$ (N)

NOTA: una masa esférica produce en su superficie y en cualquier punto de su exterior un campo gravitatorio idéntico al que produciría una masa puntual del mismo valor ubicada en su centro, y por ello podemos suponer que trabajamos siempre con masas puntuales.

## 9. GRAVEDAD EN UN PLANETA Y PESO

Cuando el centro atractor, la masa *M*, es un planeta, el campo gravitatorio que genera es la gravedad del planeta.




Su dirección y sentido son siempre desde el punto considerado hacia el centro del planeta. En cuanto a su módulo

$$|\vec{g}| = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2}$$ , pues ahora podemos descomponer la distancia $r = R + h$

Si colocamos un cuerpo de masa $m$ en dicho punto, a la fuerza gravitatoria con que se ve atraída hacia el centro del planeta la llamamos **Peso**:

$$\boxed{\vec{Peso} = \vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{g}}$$ (N) (se habla de gravedad y peso con cualquier *M* grande)

Por tanto, **en la superficie del planeta,** $h = 0 \rightarrow$ $\quad \left|\vec{g}_{sup}\right| = G\dfrac{M}{(R+h)^2} = G\dfrac{M}{(R+0)^2} = G\dfrac{M}{R^2}$

Y **en las cercanías de la superficie del planeta,** $h << R \rightarrow$ podemos aproximar $R + h \approx R$

$\left|\vec{g}\right|_{(h<<R_p)} = G\dfrac{M}{(R_p+h)^2} \approx G\dfrac{M}{R_p{}^2} = \left|\vec{g}_{sup}\right| \rightarrow$ **Peso en la superficie del planeta y cercanías:**

$\vec{Peso}_{sup} = \vec{F}_{\text{gravitatoria sup}} = m\cdot\vec{g}_{sup}$ con módulo $\boxed{\left|\vec{Peso}_{sup}\right| = m\left|\vec{g}_{sup}\right| = G\dfrac{M\cdot m}{R^2}}$

Y, si dejamos caer un cuerpo en las cercanías del planeta $\Sigma\vec{F} = \vec{Peso}_{sup} = m\vec{g}_{sup} = m\vec{a} \rightarrow$

$\vec{g}_{sup} \equiv$ **aceleración de caída libre de un cuerpo en la superficie del planeta y cercanías.**

En concreto para la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T \approx 6\,371$ km (Radio medio terrestre) $\rightarrow$

$\left|\vec{g}_{\text{sup Tierra}}\right| = g_{\text{sup Tierra}} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{5{,}97\cdot 10^{24}}{(6371\cdot 1000)^2} = 9{,}810$

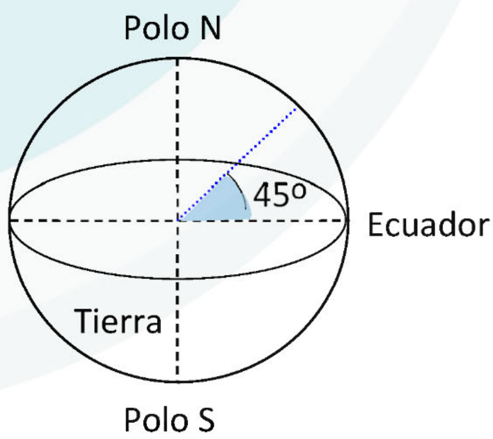
**En la superficie de la Tierra y sus cercanías** podemos tomar $\boxed{g_{\text{sup Tierra}} = 9{,}8 \text{ (N/kg) o (m/s}^2\text{)}}$

En la Tierra, para una $h$ = 20 km el error al aproximar es < 0,7 % ,que es un error despreciable:

$g_{(h\,=\,20\text{ km})} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{5{,}97\cdot 10^{24}}{\left[(6371+20)\cdot 1000\right]^2} = 9{,}749 \text{ N/kg} \rightarrow$

$g_{sup} - g_{(h\,=\,20\text{ km})} = 9{,}810 - 9{,}749 = 0{,}061 \text{ m/s}^2$ (que representa el 0,62 % de $g_{sup}$)

En realidad, esto es un promedio para latitud 45º y al nivel del mar.




$R_{polos}$ = 6 357 km $\rightarrow$ $g_{\text{sup polos}}$ = 9,854 N/kg

$R_{ecuador}$ = 6 378 km $\rightarrow$ $g_{\text{sup ecuador}}$ = 9,789 N/kg

## 10. MOVIMIENTO DE MASAS EN UN CAMPO GRAVITATORIO

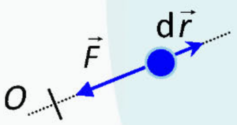
Cuando una masa se desplaza influenciada exclusivamente por la fuerza gravitatoria su aceleración es: $\vec{a}=\frac{\Sigma\vec{F}}{m}=\frac{\vec{F}_{grav}}{m}=\vec{g}$ y por tanto su velocidad vendrá dada por $\vec{v}=\int\vec{g}\,dt$.

En el caso de que la masa se desplace por la superficie del planeta, o por sus proximidades, podemos hacer la aproximación de $\vec{g}\approx\vec{g}_{sup}$ constante y la integral resulta muy sencilla: $\vec{v}=\int\vec{g}\,dt\approx\int\vec{g}_{sup}\,dt=\vec{g}_{sup}\int dt=\vec{g}_{sup}\,t+\vec{v}_0$

Pero si la masa se desplaza lejos de la superficie del planeta no podemos hacer dicha aproximación y tenemos que $|\vec{g}|=G\frac{M}{r^2}=G\frac{M}{(R+h)^2}$ cambia con el tiempo, pues $h(t)$ ya que el cuerpo se mueve $\rightarrow$ $r(t)$, pero lo peor es que no sabemos cómo es dicha dependencia temporal $\rightarrow$ NO podemos resolver la integral en función del tiempo: necesitamos hacerlo por otro método: **Energías**, ya que a fuerza gravitatoria es **conservativa**

## 11. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La función energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria viene dada por:



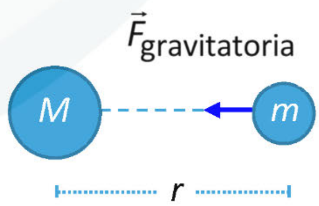

$$E_{P\,gravitatoria}=\int-\vec{F}_{gravitatoria}\cdot d\vec{r}=\int-\left|\frac{GMm}{r^2}\right|\cdot dr\cdot\cos 180^0=$$

$$=GMm\int r^{-2}dr=\frac{G\,M\,m\,r^{-1}}{-1}\rightarrow\boxed{E_{P\,gravitatoria}=-G\frac{M\cdot m}{r}}\quad \text{(J en S.I.)}$$

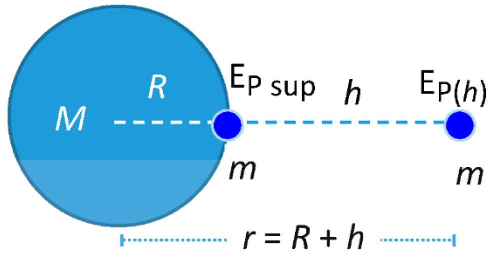
Es la $E_P$ gravitatoria de *m* en el campo gravitatorio de M, cuando dista *r* de ella.

Siempre es negativa y, como mucho, puede llegar a ser cero: cuando *m* está muy lejos de *M* escapa de su influencia, y por eso $r\rightarrow\infty$ y $E_P = 0$ (máxima).

El signo negativo es porque la fuerza siempre apunta en el sentido en que decrece $E_P$. Es así, porque si abandonamos a *m* en la zona de influencia de *M*, comienza con velocidad nula y se va moviendo hacia donde apunta la $\vec{F}_{gravitatoria}$ Desde el punto de vista energético comienza con energía cinética nula y, según se va acercando a *M*, cada vez adquiere más $\rightarrow$ debe ser a costa de perder energía potencial gravitatoria.



## 11.1. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA EN UN PLANETA




A una altura $h$ sobre la superficie $r = R + h$:

$$E_{P(h)} = -G\frac{M\cdot m}{r} = -G\frac{M\cdot m}{R+h}$$

y justo en la superficie $r = R \rightarrow E_{P(sup)} = -G\frac{M\cdot m}{r} = -G\frac{M\cdot m}{R}$

Por tanto un cuerpo situado a una altura $h$ sobre la superficie tendrá una energía potencial, con respecto a la superficie de

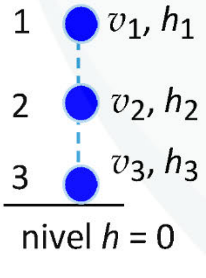
$$E_{P(h)} - E_{P(sup)} = -\frac{G\,M\cdot m}{R+h} - \left(-\frac{G\,M\cdot m}{R}\right) = G\,M\cdot m\left(\frac{-1}{R+h}+\frac{1}{R}\right) = G\,M\cdot m\left(\frac{-R+R+h}{(R+h)\cdot R}\right) =$$

$$= \frac{G\,M\cdot m h}{(R+h)\cdot R} \approx (\text{cuando } h \ll R)\; m\,g\,h \;\rightarrow\; \boxed{E_{P(h)} \approx E_{P(sup)} + m\,g\,h} \quad (\text{J en S.I.})$$

Esta *m g h es la* que hemos usado siempre como energía potencial gravitatoria para la conservación de la energía, donde trabajabamos siempre en las proximidades de la superficie terrestre ( $h << R$), y donde sólo nos interesaba la diferencia de energía potencial entre dos puntos, tomando como referencia uno de ellos, que solía ser el punto más bajo alcanzado por cualquier parte del sistema que estudiábamos.

En realidad no es la energía potencial gravitatoria, pero en esas, y sólo en esas condiciones, la podemos seguir empleando, pues (lo vemos con un ejemplo):

Dejamos caer $m$ desde el punto 1. Como la resultante es el peso, que es conservativo:




$E = E_C + E_{P\ gravitatoria}$ se conserva $\rightarrow E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{P2} = E_{C3} + E_{P3} \rightarrow$

$E_{C1} \cancel{+ E_{P\ sup}} + m\,g\,h_1 = E_{C2} \cancel{+ E_{P\ sup}} + m\,g\,h_2 = E_{C3} \cancel{+ E_{P\ sup}} + m\,g\,h_3 \rightarrow$

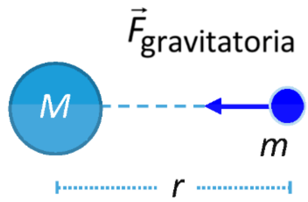
$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + m\,g\,h_1 = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + m\,g\,h_2 = \frac{1}{2}\,m\,v_3^2 + m\,g\,h_3 \rightarrow$ si, además

$v_1 = 0$ y $h_3 = 0 \rightarrow\; m\,g\,h_1 = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + m\,g\,h_2 = \frac{1}{2}\,m\,v_3^2 \;\rightarrow\; 2\,g\,h_1 = v_2^2 + 2\,g\,h_2 = v_3^2$

## 12. SATÉLITES

Una masa $m$ que orbita alrededor de otra masa $M$ es su satélite.

### 12.1. ÓRBITA CIRCULAR




Si $m$ describe M.C.U. alrededor de $M$ $\rightarrow \vec{F}_{\text{gravitatoria}} = \sum \vec{F}_{\text{centrípeta}} \rightarrow$

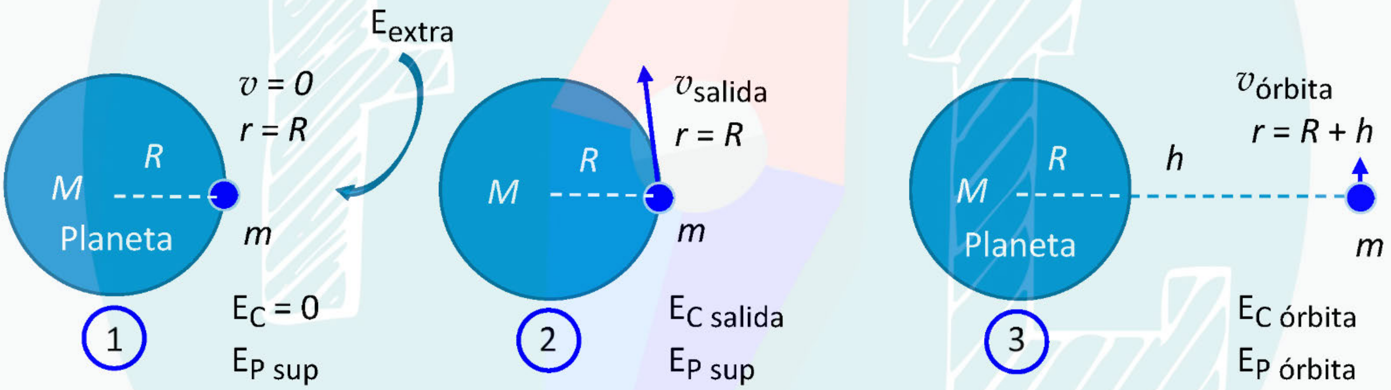
$$\left|\vec{F}_{\text{gravitatoria}}\right| = G\frac{M\cdot m}{r^2} = \left|\sum \vec{F}_{\text{centrípeta}}\right| = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \text{ (m/s)} \equiv \textbf{Velocidad Orbital.}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GM\cdot m}{r} \qquad E_P = -\frac{GM\cdot m}{r} \rightarrow$$

$$E_C + E_P = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{GM\cdot m}{r} = E} \equiv \textbf{Energía mecánica en órbita de radio } \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}E_P = -E_C \leq 0$$

$E < 0$ cuando $m$ está atrapada por el campo.

Por tanto, para poner en órbita al satélite desde la superficie de un planeta, y partiendo del reposo es necesario proporcionarle (un agente externo, no el campo) una $E_{\text{extra}}$




$$E_{\text{inicial}} + E_{\text{extra}} = E_{\text{salida}} = E_{\text{órbita}}$$

En nuestro modelo sencillo, esta energía extra se le comunica al satélite aplicándole una fuerza que consiga ponerlo a la velocidad con la que sale de la superficie del planeta $\rightarrow$ mediante esa fuerza, que hace un agente externo y no el campo, se le proporciona una energía cinética que es en realidad el trabajo de dicha fuerza.

A partir de ese instante, si sobre el satélite sólo actúa la fuerza gravitatoria, su E se conserva, y a medida que se va alejando del planeta su $E_P$ aumenta (es negativa y se va aproximando a cero), a costa de disminuir su $E_C$, hasta que justo se cumpla que $E_C = -\,{}^{1}\!/_{2}\,E_P$ y orbitará.

$$\rightarrow \boxed{E_{\text{extra}} = W_{\text{externo}} = E_{\text{salida}} - E_{\text{inicial}} = E_{\text{órbita}} - E_{\text{inicial}}}$$

## 12.2. VELOCIDAD DE ESCAPE

Llamamos **Velocidad de escape**, $v_{esc}$, de un satélite, desde el punto en que se encuentre, a la velocidad con la que debe partir desde allí para que, gastando toda su $E_C$ consiga escapar del campo gravitatorio del planeta, es decir, alejarse hasta una distancia tan grande de *M* como para no notar su atracción: $r \to \infty$ y por tanto su $E_P = 0$ $\quad \to E_{final} = E_{Cfinal} + E_{Pfinal} = 0 + 0 = 0$

Y, como desde que sale, con $v_{esc}$ , a distancia *r* del centro de *M*, hasta el final solamente actúa sobre él la Fuerza gravitatoria, que es conservativa $\to$

$$\boxed{E_{\text{salida con } v_{esc}} = E_{final} = 0} \to \frac{1}{2} m v_{esc}^2 + \left(-\frac{GM \cdot m}{r}\right) = 0 + 0 \to v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \boxed{\sqrt{2gr} = v_{esc}}$$

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Distinguimos entre dos posibilidades

· Si parte desde una órbita de radio $r = R + h \to \quad v_{esc} = \sqrt{2g(R+h)}$

· Si parte desde la superficie del planeta , $r = R$ y $g = g_{sup} \to \quad v_{esc\ sup} = \sqrt{2 g_{sup} R}$

En concreto para la Tierra, $R_T = 6\,371$ km, $g_{sup\ Tierra} = 9{,}8\ m/s^2 \to$

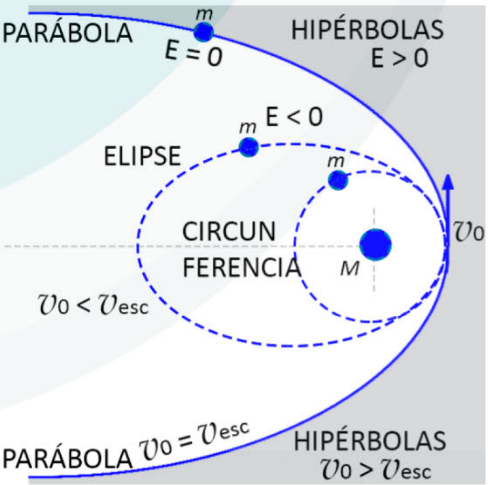
$v_{esc\ sup\ T} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6371 \cdot 10^3} = 11\,175$ (m/s) = 11,18 (km/s)

Si sale, desde donde se encuentre, con velocidad inicial $v_0$, hay tres posibilidades:

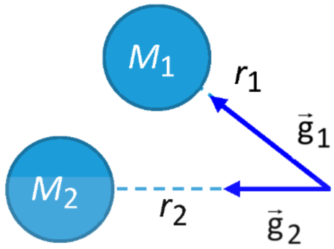
· Si $v_{salida} < v_{esc}$ $\to$ seguirá orbitando atrapado por el campo y con $E < 0$.
· Si $v_{salida} = v_{esc}$ $\to$ justo escapará del campo y se quedará con $E = 0$.
· Si $v_{salida} > v_{esc}$ $\to$ escapará y aún tendrá $v \to$ seguirá alejándose con MRU y con $E > 0$.

## 12.3. ÓRBITAS SEGÚN LA ENERGÍA

| Energía Mecánica tras el lanzamiento E | | Velocidad de partida $v_0$ | Tipo de Órbita | |
|---|---|---|---|---|
| $E < 0$ | $E < ½\ E_P$ | $v_0 < v_{esc}$ | No orbita | Cae vertical |
| | $E = ½\ E_P$ | | Cerrada | Circunferencia |
| | $½\ E_P < E < 0$ | | | Elipse |
| $E = 0$ | | $v_0 = v_{esc}$ | Abierta | Parábola |
| $E > 0$ | | $v_0 > v_{esc}$ | | Hipérbola |



## 13. CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR VARIAS MASAS




Si tenemos $M_1$, $M_2$…, cada una crea una influencia gravitatoria a su alrededor.

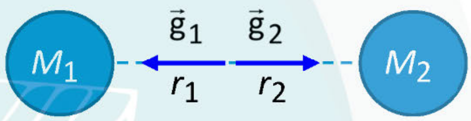
Por tanto, si en un punto del espacio colocamos ahora una $m$ se verá afectada por una resultante

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = m\vec{g}_1 + m\vec{g}_2 + \ldots = = m(\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots) = m\vec{g}_{total} = m\vec{g}$$

siendo $\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots}$

Vemos que como las fuerzas se rigen por el principio de superposición el campo también.

### 13.1. CAMPO CREADO POR DOS MASAS IGUALES EN SU PUNTO MEDIO




Es la suma vectorial de los campos que crean cada una de las masas en dicho punto.

$$|\vec{g}_1| = G\frac{M_1}{r^2} \qquad |\vec{g}_2| = G\frac{M_2}{r^2} = |\vec{g}_1| \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \vec{0} \rightarrow$$

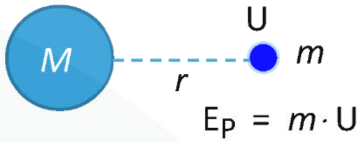
el campo gravitatorio neto creado por dos masas iguales, en su punto medio, es nulo → si colocamos una $m$ en el punto medio entre dos masas idénticas no se verá afectada por ninguna fuerza neta (resultante).

## 14. POTENCIAL GRAVITATORIO

Llamamos Potencial Gravitatorio, U, en un punto a la Energía potencial gravitatoria por unidad de masa en dicho punto.

$$\boxed{U = \frac{E_{P\,gravitatoria}}{m} \quad (J/kg)}$$


Se define de forma que la $E_{P\ gravitatoria}$ de $m$ en un punto sea $\boxed{E_{P\ gravitatoria} = m \cdot U}$




Cuando el campo lo crea una única masa M, hemos visto que $E_{P\ gravitatoria} = -G\dfrac{M \cdot m}{r} \rightarrow$

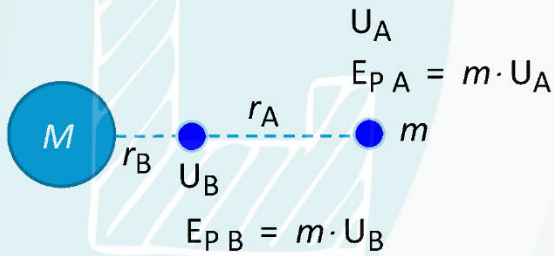
$$\boxed{U = -G\frac{M}{r}} \quad \begin{cases} <0 \text{ cerca de M} \\ =0 \text{ si } r \rightarrow \infty \text{ (tan lejos de M que ya no influye)} \end{cases}$$

Cuando el campo es creado por varias masas $M_1$, $M_2$... $U = \dfrac{E_P}{m} = -G\left(\dfrac{M_1}{r_1} + \dfrac{M_2}{r_2} + \ldots\right) \rightarrow$

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + \ldots}$$

El potencial gravitatorio también se rige por el principio de Superposición.

Al ser la fuerza gravitatoria conservativa, el trabajo que realiza sobre $m$ cuando se desplaza desde un punto A hasta otro B será



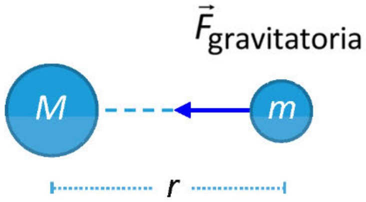

$W_{AB\ gravitatoria} = E_{PA} - E_{PB} = m \cdot U_A - m \cdot U_B \rightarrow$

$$\boxed{W_{AB\ gravitatoria} = m \cdot (U_A - U_B)}$$

y llamamos a $(U_A - U_B) \equiv$ **Diferencia de potencial gravitatorio entre A y B.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } \vec{F} = m \cdot \vec{g} \\ E_P = m \cdot U \\ \vec{F} \text{ apunta hacia } E_P \text{ menores} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{g} \text{ apunta siempre hacia U menores.}$$

## FUERZA




$$\left|\vec{F}_{gravitatoria}\right| = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$/kg$^2$

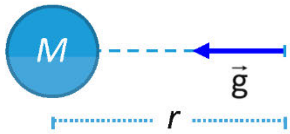
Con varias $M$: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$

## vectores

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{g}}$$

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{g}}$$

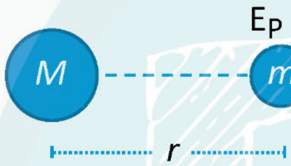
## CAMPO




$$\left|\vec{g}\right| = G\,\frac{M}{r^2}$$

Con varias $M$: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots$

## ENERGÍA POTENCIAL



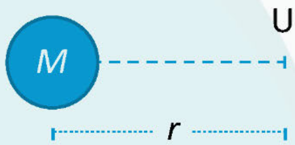

$$E_{P\,gravitatoria} = -\,G\,\frac{M \cdot m}{r}$$

Con varias $M$: $E_P = E_{P1} + E_{P2} + \cdots$

## escalares

$$\boxed{E_P = m \cdot U}$$

## POTENCIAL




$$U = -\,G\,\frac{M}{r}$$

Con varias $M$: $U = U_1 + U_2 + \cdots$

$$\boxed{W_{AB\ gravitatoria} = E_{PA} - E_{PB} = m \cdot (U_A - U_B)} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{lo hace el campo} \\ < 0 \rightarrow \text{lo hace un agente externo} \\ \qquad W_{AB\ externa} = -\,W_{AB\ gravitatoria} \end{cases}$$

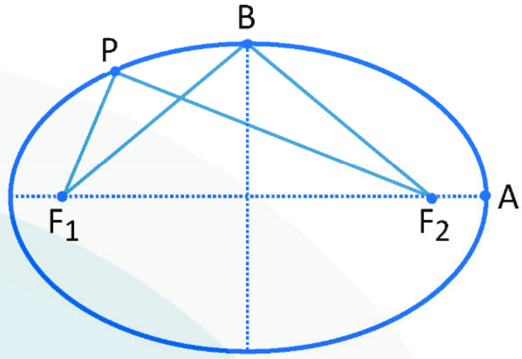
Conservación de la energía: $E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$ con $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

# FORMULARIO CAMPO GRAVITATORIO

| | |
|---|---|
| $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$ | Constante de gravitación universal |
| $v_{\text{areolar}} = \dfrac{\text{área barrida}}{\text{tiempo en barrerla}}$ | Velocidad areolar ($\mathrm{m^2\ s^{-1}}$). $v_{\text{areolar}} = \lvert\vec{L}\rvert / 2m$ para planetas. |
| $r_{\text{medio}} = \dfrac{r_{\text{afelio}} + r_{\text{perihelio}}}{2}$ | Radio medio de la órbita elíptica (m) |
| $\lvert\vec{F}_{\text{gravitatoria}}\rvert = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$ | Módulo de la fuerza gravitatoria entre *M* y *m* (N) |
| $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | Momento lineal o cantidad de movimiento ($\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$) |
| $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ | Principio fundamental de la dinámica de traslación |
| $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ | Momento angular, o cinético, de un cuerpo calculado respecto a un punto ($\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$). Para los planetas respecto a la posición del sol se conserva |
| $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\,M} \cdot r^3_{\text{medio}}$ | Tercera Ley de Kepler |
| $\lvert\vec{g}\rvert = G\dfrac{M}{r^2}$ | Módulo del campo gravitatorio de *M* ($\mathrm{N\ kg^{-1}}$) o ($\mathrm{m\ s^{-2}}$) |
| $g_{\text{sup Tierra}} = 9{,}8$ | Gravedad en la superficie terrestre y cercanías (hasta 20 km de altura) ($\mathrm{N\ kg^{-1}}$) o ($\mathrm{m\ s^{-2}}$) |
| $\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{g}$ | Relación entre el campo y la fuerza gravitatoria (N) |
| $\vec{Peso} = \vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{g}$ | Peso de m ( N). Si m está en la superficie de M $\lvert\vec{Peso}_{\text{sup}}\rvert = m\lvert\vec{g}_{\text{sup}}\rvert = G\dfrac{M \cdot m}{R_P^2}$ |
| $E_{P\ \text{gravitatoria}} = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$ | Energía potencial gravitatoria de *m* en el campo de *M* (J) |
| $E_{P(h)} \approx E_{P(\text{sup})} + m\,g\,h$ | Energía potencial gravitatoria de m a una altura h << $R_P$ (J) |
| $E = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{medio}}}$ | Energía mecánica de *m* orbitando alrededor de *M* (J). Para los planetas se conserva. |
| $E_{\text{salida con } v_{\text{esc}}} = E_{\text{final}} = 0$ | Energía mecánica cuando m parte con $v_{\text{escape}}$ (J) |
| $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots$ | Campo gravitatorio creado por $M_1$, $M_2$, ... ($\mathrm{N\ kg^{-1}}$) o ($\mathrm{m\ s^{-2}}$) |
| $U = -G\dfrac{M}{r}$ | Potencial gravitatorio en un punto del campo de *M* ($\mathrm{J\ kg^{-1}}$) |
| $U = U_1 + U_2 + \ldots$ | Potencial gravitatorio creado por $M_1$, $M_2$, ... ($\mathrm{J\ kg^{-1}}$) |
| $E_{P\ \text{gravitatoria}} = m \cdot U$ | Relación entre la Energía potencial y el potencial gravitatorios |
| $W_{AB\ \text{grav.}} = m \cdot (U_A - U_B)$ | Trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sobre *m* al desplazarse desde un punto A hasta otro B (J) |
| $\varepsilon = (r_a - r_p) / (r_a + r_p)$ | Excentricidad de una órbita elíptica (adimensional) |

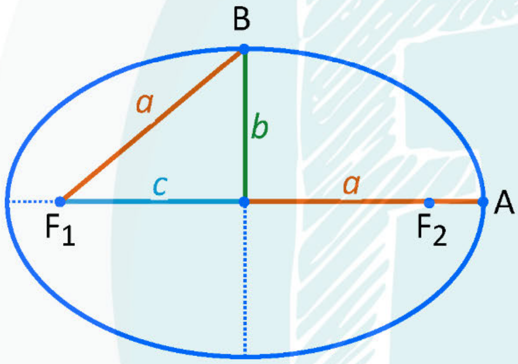
## OE 1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

La elipse es una curva plana y cerrada, en la que todos sus puntos, cumplen la condición de que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados **focos** ($F_1$ y $F_2$), es constante.




Presenta dos ejes de simetría: el **eje mayor**, que pasa por los focos, y el **eje menor**, perpendicular al mayor y pasando por el **centro** de la elipse, que es el punto medio entre los focos.

$PF_1 + PF_2 = AF_1 + AF_2$ = longitud del eje mayor, a la que llamamos $2a \rightarrow$ ***a*** es el **semieje mayor**

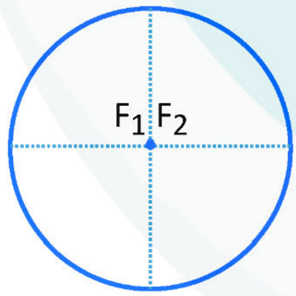



Llamamos ***b*** al el **semieje menor** y ***c*** al **semieje focal**, que es la mitad de la distancia entre los dos focos.

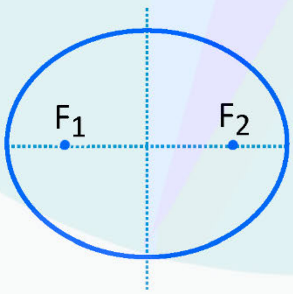
$BF_1 + BF_2 = 2a$, pero como $BF_1 = BF_2 \rightarrow BF_1 = a$

Según el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

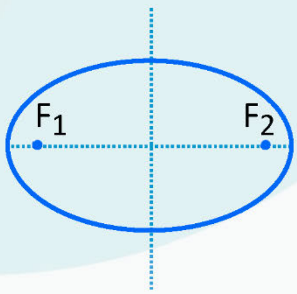
Se define la **excentricidad** de la elipse como $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\,, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$



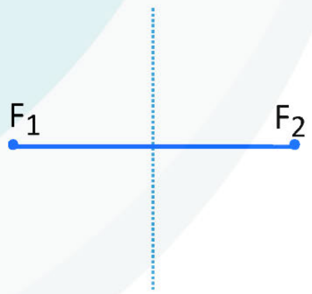

$c = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$
circunferencia
$a = b$




$\varepsilon = 0,6$



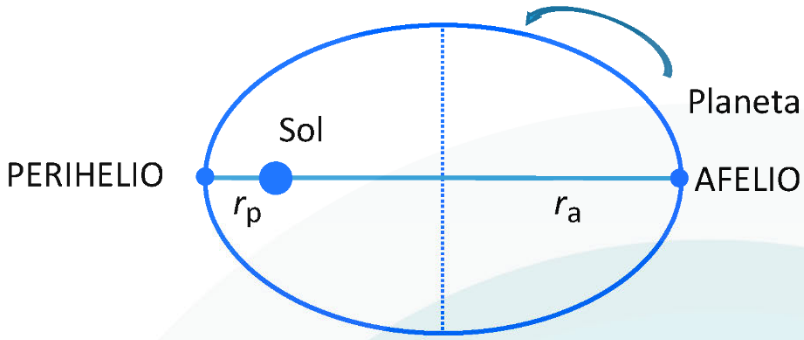

$\varepsilon = 0,8$




$a = c \rightarrow \varepsilon = 1$
$b = 0$, recta

## OE 2. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LAS ÓRBITAS ELÍPTICAS

Si un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol, con este en ubicado en uno de sus focos, al punto de la órbita más cercano al Sol lo llamamos Perihelio, y al más lejano Afelio.




El radio medio de la órbita es el semieje mayor:

$$\boxed{a = \frac{r_a + r_p}{2} = r_{medio}}$$

$$a - c = r_p \rightarrow c = a - r_p = \frac{r_a + r_p}{2} - r_p = \frac{r_a + r_p - 2r_p}{2} \rightarrow \quad \boxed{c = \frac{r_a - r_p}{2}}$$

Relación entre los ejes: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 =$

$$\left(\frac{r_a + r_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_a - r_p}{2}\right)^2 = \frac{r_a^2 + r_p^2 + 2r_a r_p - \left(r_a^2 + r_p^2 - 2r_a r_p\right)}{4} = r_a r_p \rightarrow \quad \boxed{b = \sqrt{r_a \cdot r_p}}$$

En cuanto a la excentricidad: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{r_a - r_p}{2}}{\frac{r_a + r_p}{2}} \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}}$

## OE 3. ÓRBITAS ELÍPTICAS

- Conservación del momento angular de *m*, calculado respecto al centro de *M*:

$$\left|\vec{L}a\right| = \left|\vec{L}p\right| \rightarrow r_a \cdot m \left|\vec{v}_a\right| \cdot \text{sen}90^o = r_p \cdot m \left|\vec{v}_p\right| \cdot \text{sen}90^o \rightarrow r_a \cdot \left|\vec{v}_a\right| = r_p \left|\vec{v}_p\right| \rightarrow \quad \boxed{v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p}$$

- Conservación de la energía mecánica de *m* mientras orbita:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} \rightarrow v_a^2 - \frac{2GM}{r_a} = v_p^2 - \frac{2GM}{r_p} \rightarrow \quad 2GM\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right) = v_p^2 - v_a^2$$

$$2GM\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right) = v_p^2\left(1 - \frac{r_p^2}{r_a^2}\right) \rightarrow 2GM\left(\frac{r_a - r_p}{r_p \cdot r_a}\right) = v_p^2\left(\frac{r_a^2 - r_p^2}{r_a^2}\right) \rightarrow$$

$$\frac{2GM}{r_p}\left(\frac{r_a - r_p}{r_a}\right) = v_p^2 \cdot \left(\frac{r_a + r_p}{r_a}\right) \cdot \left(\frac{r_a - r_p}{r_a}\right) \rightarrow GM \cdot \frac{r_a}{r_p} = v_p^2 \cdot \left(\frac{r_a + r_p}{2}\right) = v_p^2 \cdot r_{medio} \rightarrow$$

$$\boxed{v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_{medio}} \cdot \frac{r_a}{r_p}}} \rightarrow v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p = v_a = \frac{r_p}{r_a}\sqrt{\frac{GM}{r_{medio}} \cdot \frac{r_a}{r_p}} \rightarrow \boxed{v_a = \sqrt{\frac{GM}{r_{medio}} \cdot \frac{r_p}{r_a}}}$$

- Energía mecánica orbitando: como es constante la podemos calcular en cualquier punto de la órbita. En el afelio:

$$E=\frac{1}{2}mv_a{}^2-\frac{GMm}{r_a}=\frac{1}{2}m\frac{GM}{\frac{r_a+r_p}{2}}\cdot\frac{r_p}{r_a}-\frac{GMm}{r_a}=\frac{GMm}{r_a}\cdot\left(\frac{r_p}{r_a+r_p}-1\right)=\frac{GMm}{r_a}\cdot\left(\frac{r_p-(r_a+r_p)}{r_a+r_p}\right)=$$

$$\frac{GMm}{r_a}\cdot\left(\frac{-r_a}{r_a+r_p}\right)=-\frac{GMm}{r_a+r_p}=-\frac{1}{2}GMm\frac{2}{r_a+r_p}\rightarrow \boxed{E=-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_{medio}}}$$ como en MCU con $r_{medio}$

- Tercera Ley de Kepler: $\boxed{T^2=\frac{4\pi^2}{G\,M}\cdot r_{medio}^3}$ como en MCU con $r_{medio}$

- Momento angular, en función de las distancias:

$$\left|\vec{L}\right|=\left|\vec{L}p\right|=r_p\cdot m\left|\vec{v}_p\right|\cdot \text{sen}90^o=r_p\cdot m\cdot\sqrt{\frac{GM}{r_{\text{medio}}}\cdot\frac{r_a}{r_p}}\rightarrow\left|\vec{L}\right|=m\cdot\sqrt{\frac{GM}{r_{\text{medio}}}\cdot r_a\cdot r_p}$$

- Velocidad areolar: $v_{\text{areolar}}=\frac{\text{área elipse}}{T}=\frac{\pi\cdot a\cdot b}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M}\cdot r^3{}_{medio}}}=\frac{\pi\cdot r_{medio}\cdot\sqrt{r_a\cdot r_p}}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M}\cdot r^3{}_{medio}}}$

$$=\frac{\pi\cdot r_{medio}\cdot\sqrt{r_a\cdot r_p}}{2\cdot\pi\cdot r_{medio}\sqrt{\frac{r_{medio}}{G\,M}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\,M\cdot r_a\cdot r_p}{r_{medio}}}=\frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}\rightarrow\boxed{v_{\text{areolar}}=\frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}}$$ igual que en MCU

- Velocidad angular: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M}\cdot r^3{}_{medio}}}=\frac{2\pi}{2\cdot\pi\cdot r_{medio}\sqrt{\frac{r_{medio}}{G\,M}}}=\frac{\sqrt{\frac{G\,M}{r_{medio}}}}{r_{medio}}$

Pero $v_a\cdot v_p=\sqrt{\frac{GM}{r_{\text{medio}}}\cdot\frac{r_p}{r_a}}\cdot\sqrt{\frac{GM}{r_{\text{medio}}}\cdot\frac{r_a}{r_p}}=\frac{GM}{r_{\text{medio}}}\rightarrow\boxed{\sqrt{v_a\cdot v_p}=\omega\cdot r_{\text{medio}}}$